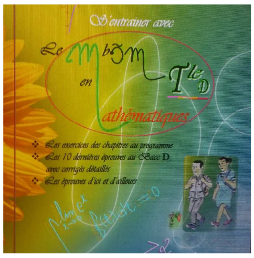
Enseignements secondaires
e-Learning mathématiques
Tel : 695 95 81 81



Année Scolaire 2020-2021
Classe : Tle D
Durée : 2h

EXERCICE :

On considère la fonction définie sur R par $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$ et (Cf)sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.Unité graphique 2cm.

1-a) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. ***1pt***

b) Montrer que la droite (D) : $y = 2x + 1$ est une asymptote à (C) en $-\infty$;
puis étudier la position relative de (D) et (C). ***0,75pt***

2-a) Calculer f' et f ''. ***0,5pt***

b) Dresser le tableau de variation de f'. ***0,75pt***

c) Vérifier que f'(1)=0 puis en déduire le signe de f' suivant les valeurs de x. ***0,5pt***

d) Dresser le tableau variation de f. ***0,5pt***

3-Démontrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique α telle que 1,9<α<2. ***0,5pt***

4-Tracer (D) et (Cf). ***1pt***

5-En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire du domaine plan limité par (Cf), l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x=1. ***0,75pt***

6-On Considère la fonction g définie sur $I = [1,9;2]$ par : $g(x) = 1 + \ln\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)$.

a) Démontrer que sur I l'équation f(x)=0 équivaut à g(x)=x. ***0,5pt***

b) Etudier le sens de variation de g puis, démontrer que pour tout $x \in I$, $g(x) \in I$. ***1pt***

c) Démontrer que pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \le \dfrac{1}{9}$. ***0,75pt***

7-Soit (U_n) la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$.

a) Démontrer en utilisant le théorème des inégalités finis, que pour tout entier naturel n,
$|U_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{1}{9}|U_n - \alpha|$. ***0,5pt***

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $|U_n - \alpha| \le \left(\dfrac{1}{9}\right)^n$. ***0,5pt***

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite. ***0,5pt***